HƯỚNG DẪN HỌC SINH TỰ ÔN TẬP LẦN 3_ THÁNG 2- LỚP 11

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa:

a) ***Định nghĩa 1:*** Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ số hạng nào đó trở đi. Kí hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=0$ hay $u_n \to 0$ khi $n \to +\infty$.

b) ***Định nghĩa 2:*** Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là a hay (u_n) dần tới a khi n dần tới vô cực ($n\to+\infty$), nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-a)=0.$ Kí hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=a$ hay $u_n \to a$ khi $n \to +\infty$.

❖ ***Chú ý:*** $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=\lim(u_n)$.

2. Một vài giới hạn đặc biệt.

a) $\lim\dfrac{1}{n}=0$, $\lim\dfrac{1}{\mathrm{n}^{\mathrm{k}}}=0$, $\mathrm{n}\in\mathbb{Z}_+^*$

b) $\lim(q^n)=0$ với $|q|<1$.

c) Lim(u_n)=c (c là hằng số) => Lim(u_n)=limc=c.

3. Một số định lý về giới hạn của dãy số.

a) ***Định lý 1:*** Cho dãy số (u_n),(v_n) và (w_n) có : $\mathrm{v_n}\le u_n\le w_n\ \forall \mathrm{n}\in\mathbb{N}^*$ và $\lim(v_n)=\lim(w_n)=a \Rightarrow \lim(\mathrm{u_n})=a$.

b) ***Định lý 2:*** Nếu lim(u_n)=a , lim(v_n)=b thì:

$$\lim(u_n\pm v_n)=\lim(u_n)\pm\lim(v_n)=a\pm b$$

$$\lim(u_n.v_n)=\lim u_n.\lim v_n=a.b$$

$$\lim\frac{u_n}{v_n}=\frac{\lim(u_n)}{\lim(v_n)}=\frac{a}{b}\ ,\left(\mathrm{v_n}\ne 0\ \forall \mathrm{n}\in\mathbb{N}^*;b\ne 0\right)$$

$$\lim\sqrt{u_n}=\sqrt{\lim(u_n)}=\sqrt{a}\ ,\left(u_n\ge 0\ ,\mathrm{a}\ge 0\right)$$

4. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có công bội q ,với $|q|<1$.

$$\lim S_n=\lim\frac{u_1}{1-q}$$

5. Dãy số dần tới vô cực:

a) Ta nói dãy số (u_n) dần tới vô cực $(u_n\to+\infty)$ khi n dần tới vơ cực $(n\to+\infty)$ nếu u_n lớn hơn một số dương bất kỳ, kể từ số hạng nào đó trở đi. Kí hiệu: lim(u_n)=$+\infty$ hay $u_n \to +\infty$ khi $n\to+\infty$.

b) Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ khi $n\to+\infty$ nếu $\lim(-u_n)=+\infty$.Ký hiệu: lim(u_n)=$-\infty$ hay $u_n \to -\infty$ khi $n\to+\infty$.

c) Định lý:

- Nếu : $\lim(u_n)=0$ $\left(u_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ thì $\lim \frac{1}{u_n}=\infty$
- Nếu : $\lim(u_n)=\infty$ thì $\lim \frac{1}{u_n}=0$

B. **PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN**.

1. Giới hạn của dãy số (u_n) với $u_n=\frac{P(n)}{Q(n)}$ với P,Q là các đa thức:

- Nếu bậc P = bậc Q = k, hệ số cao nhất của P là a_0, hệ số cao nhất của Q là b_0 thì chia tử số và mẫu số cho n^k để đi đến kết quả : $\lim(u_n)=\frac{a_0}{b_0}$.
- Nếu bậc P nhỏ hơn bậc Q = k, thì chia tử và mẫu cho n^k để đi đến kết quả :$\lim(u_n)=0$.
- Nếu k = bậc P > bậc Q, chia tử và mẫu cho n^k để đi đến kết quả :$\lim(u_n)=\infty$.

2. Giới hạn của dãy số dạng: $u_n=\frac{f(n)}{g(n)}$, f và g là các biển thức chứa căn.

- Chia tử và mẫu cho n^k với k chọn thích hợp.
- Nhân tử và mẫu với biểu thức liên hợp.

C. CÁC VÍ DỤ.

1. $\lim \frac{3n^2+2n+5}{7n^2+n-8}=\lim \frac{\frac{3n^2+2n+5}{n^2}}{\frac{7n^2+n-8}{n^2}} \lim \frac{3+\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}{7+\frac{1}{n}-\frac{8}{n^2}}=\frac{3}{7}$

2. $\lim \frac{\sqrt{n^2+1}+4n}{3n-2}=\lim \frac{\frac{\sqrt{n^2+1}+4n}{n}}{\frac{3n-2}{n}}=\lim \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+4}{3-\frac{2}{n}}=\frac{1+4}{3}=\frac{5}{3}$

3. $\lim\left(\sqrt{n^2+2n+3}-n\right)=\lim \frac{\left(\sqrt{n^2+2n+3}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n+3}+n\right)}{\sqrt{n^2+2n+3}+n}=\lim \frac{n^2+2n+3-n^2}{\sqrt{n^2+2n+3}+n}$

$$=\lim \frac{2n+3}{\sqrt{n^2+2n+3}+n}=\lim \frac{2n+3}{n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+1\right)}=\lim \frac{2+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+1}=\frac{2}{1+1}=1$$

$\boxed{\sqrt{n^2+2n+3}+n \textit{ là biểu thức liên hợp của } \sqrt{n^2+2n+3}-n}$

4. $1+\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{8}\right)+...+\left(-\frac{1}{2}\right)^{(n-1)}+...=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}$. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có công bội $q=-\frac{1}{2}$ và số hạng đầu $u_1=1$.

5. $\lim\frac{n^3-2n+1}{2n^2-n+3}=\lim\frac{\frac{n^3-2n+1}{n^3}}{\frac{2n^2-n+3}{n^3}}=\lim\frac{1-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^3}}=+\infty$.

6. $\lim\left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n}\right)=\lim\frac{\left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n}\right)\left(\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{n+2}.\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}\right)}{\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{n+2}.\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}$

$=\lim\frac{\left(\sqrt[3]{n+2}\right)^3-\left(\sqrt[3]{n}\right)^3}{\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{n+2}.\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}=\lim\frac{n+2-n}{\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{n+2}.\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}$

$=\lim\frac{2}{\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{n+2}.\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}=0$

D. BÀI TẬP

1. Tìm các giới hạn:

a) $\lim\frac{7n^2+n}{5n^2+2}$

b) $\lim\frac{2n+1}{n+2}$

c) $\lim\frac{3n^2+1}{n^2+4}$

d) $\lim\frac{6n^3+3n-1}{7n^3+2n}$

e) $\lim\frac{n^2+2n-4}{7n^3-2n+9}$

f) $\lim\frac{\sqrt{n^2+2}}{\sqrt{4n^2-2}}$

g) $\lim\frac{\sqrt[3]{8n^3+1}}{2n-5}$

h) $\lim\left(\sqrt{n^2+2n-3}-n\right)$

i) $\lim\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

2. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\frac{1+2+3+4+...+n}{n^2+3}$

b) $\lim\frac{5\sin(n)+7\cos(n)}{2n+1}$

3. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\frac{\sqrt{3n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{n}$

b) $\lim\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\right)$

c) $\lim\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-2}\right)$

d) $\lim\dfrac{1+a+a^2+a^3+a^4+...+a^n}{1+b+b^2+b^3+b^4+...+b^n}$ $\quad |a|<1,\ |b|<1$

e) $\lim\dfrac{2n^3}{n^4+3n^2+2}$

f) $\lim\dfrac{n+(-1)^n}{2n^2+(-1)^{(n+1)}}$

g) $\lim\left(1+n^2-\sqrt{n^4+3n+1}\right)$

h) $\lim\dfrac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}-n^2}$

i) $\lim\dfrac{\left(2n\sqrt{n}+1\right)\left(\sqrt{n}+3\right)}{(n+1)(n+2)}$

j) $\lim\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)...\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$

k) $\lim\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

4. Tìm tổng các cấp số nhân lùi vô hạn sau:

a) $\lim\dfrac{2n^3-11n+1}{n^2-2}$

b) $\lim\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}}$

c) $\lim\left[n\left(\sqrt[3]{n^3+n^2}-n\right)\right]$

GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. **Định nghĩa:** Cho hàm số f(x) xác định trên khoảng K. Ta nói rằng hàm số f(x) có giới hạn là L khi x dần tới a nếu với mọi dãy số (x_n), $x_n \in K$ và $x_n \neq a$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ mà $\lim(x_n)=a$ đều có $\lim[f(x_n)]=L$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]=L$.

2. Một số định lý về giới hạn của hàm số:

a) **Định lý 1:** Nếu hàm số có giới hạn bằng L thì giới hạn đó là duy nhất.

b) **Định lý 2:** Nếu các giới hạn: $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]=L$, $\lim\limits_{x\to a}\left[g(x)\right]=M$ thì:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]\pm\lim_{x\to a}\left[g(x)\right]=L\pm M$$

$$\lim_{x\to a}\left[f(x).g(x)\right]=\lim_{x\to a}\left[f(x)\right].\lim_{x\to a}\left[g(x)\right]=L.M$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]}{\lim\limits_{x\to a}\left[g(x)\right]}=\frac{L}{M}\ ,\ M\neq 0$$

$$\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]}=\sqrt{L}\ ;f(x)\geq 0, L\geq 0$$

c) Cho ba hàm số f(x), h(x) và g(x) xác định trên khoảng K chứa điểm a (có thể trừ điểm a), g(x)≤f(x)≤h(x) $\forall x\in K, x\neq a$ và $\lim\limits_{x\to a}\left[g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}\left[h(x)\right]=L\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]=L$.

3. Mở rộng khái niệm giới hạn hàm số:

a) Trong định nghĩa giới hạn hàm số , nếu với mọi dãy số (x_n), lim(x_n) = a , đều có lim[f(x_n)]=∞ thì ta nói f(x) dần tới vô cực khi x dần tới a, kí hiệu: $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]=\infty$.

b) Nếu với mọi dãy số (x_n) , lim(x_n) = ∞ đều có lim[f(x_n)] = L , thì ta nói f(x) có giới hạn là L khi x dần tới vô cực, kí hiệu: $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)\right]=L$.

c) Trong định nghĩa giới hạn hàm số chỉ đòi hỏi với mọi dãy số (x_n), mà x_n > a $\forall n\in\mathbb{N}^*$, thì ta nói f(x) có giới hạn về bên phải tại a, kí hiệu : $\lim\limits_{x\to a^+}\left[f(x)\right]$. Nếu chỉ đòi hỏi với mọi dãy số (x_n), x_n < a $\forall n\in\mathbb{N}^*$ thì ta nói hàm số có giới hạn bên trái tại a , kí hiệu: $\lim\limits_{x\to a^-}\left[f(x)\right]$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Khi tìm giới hạn hàm số ta thường gặp các dạng sau:

1. Giới hạn của hàm số dạng: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}\ \left(\dfrac{0}{0}\right)$

- Nếu f(x) , g(x) là các hàm đa thức thì có thể chia tử số , mẫu số cho (x-a) hoặc $(x-a)^2$.
- Nếu f(x) , g(x) là các biểu thức chứa căn thì nhân tử và mẫu cho các biểu thức liên hợp.

2. Giới hạn của hàm số dạng: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}\ \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

- Chia tử và mẫu cho x^k với k chọn thích hợp. Chú ý rằng nếu $x\to+\infty$ thì coi như x>0, nếu $x\to-\infty$ thì coi như x<0 khi đưa x ra hoặc vào khỏi căn bậc chẵn.

3. Giới hạn của hàm số dạng: $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x).g(x)\right]\quad(0.\infty)$. Ta biến đổi về dạng: $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

4. Giới hạn của hàm số dạng: $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}\right]\quad(\infty\text{-}\infty)$

- Đưa về dạng: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-g(x)}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}}$

C. CÁC VÍ DỤ

1. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=\dfrac{(-2)^2-3(-2)+2}{(-2)-2}=-\dfrac{12}{4}=-3$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-1)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x-1)=2-1=1$.Chia tử và mẫu cho (x-2).

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{3x}-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)\left(\sqrt{3x}+3\right)}{\left(\sqrt{3x}-3\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)\left(\sqrt{3x}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+1-4)\left(\sqrt{3x}+3\right)}{\left(3x-3^2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)\left(\sqrt{3x}+3\right)}{3(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left(\sqrt{3x}+3\right)}{3\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{3.3}+3\right)}{3\left(\sqrt{3+1}+2\right)}=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$

4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x+1}{x-3}=\infty$ (vì tử dần về 1 còn mẫu dần về 0).Cụ thể: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-3x+1}{x-3}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2-3x+1}{x-3}=-\infty\end{cases}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-x^2-1}{x^3-4x^2+5x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(2x^2+x+1\right)}{(x-1)^2(x-2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(2x^2+x+1\right)}{(x-1)(x-2)}=\infty$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+3}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{2x^2-x+3}{x^2}}{\dfrac{x^2+1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{2}{1}=2$

7. $\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x-1}=0$

8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=1$

9. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)=-1$.

10.Cho hàm số : $f(x)=\begin{cases}x^2-x+3 & (x\le 1)\\ \dfrac{x+a}{x} & (x>1)\end{cases}$. Tìm a để hàm số có giới hạn khi x dần tới 1 và tìm giới hạn đó.

<u>Giải</u>

Ta có : $\lim\limits_{x\to 1^-}\left[f(x)\right]=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2-x+3\right)=3$.

$$\lim_{x\to 1^+}\left[f(x)\right]=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+a}{x}=a+1$$

Vậy $\lim_{x\to 1}\left[f(x)\right]=3\Leftrightarrow a+1=3\Leftrightarrow a=2$

11. $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left(x^2+2x+4\right)=12$. Dạng $\left(\frac{0}{0}\right)$.

12. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x-1}{2x^3+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3+2x-1}{x^3}}{\frac{2x^3+1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{2+\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{2}$. Dạng $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

13. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x.\sqrt[3]{x^3+1}}\right)\left(3x^2-x+1\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2\left(3x^2-x+1\right)}{x.\sqrt[3]{x^3+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2\left(3x^2-x+1\right)}{x^2}}{\frac{x.\sqrt[3]{x^3+1}}{x^2}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2\left(3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}}=\frac{6}{1}=6$$

14. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+3}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+3}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x+3}+x\right)}{\sqrt{x^2+x+3}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+3-x^2}{\sqrt{x^2+x+3}+x}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+3}{\sqrt{x^2+x+3}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x+3}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+x+3}+x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}$. Dạng $(\infty-\infty)$.

D. BÀI TẬP.

1. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x\to 0}\left(x^3+4x^2+10\right)$

b) $\lim_{x\to 3}\left(5x^2-7x\right)$

c) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+5}{x+5}$

d) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x-15}{x-3}$

e) $\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+3x+1}{x^2-1}$

f) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$

g) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^4-a^4}{x-a}$

h) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x^2-3x-3}}{x+2}$

2. Tìm các giới hạn :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{x-1}}{3x}$

d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x^2+3}-2}$

e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{(x-2)^2}$

f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^3-x^2-x+1}$

g) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$

h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^6-5x^5+x}{(1-x)^2}$

i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{8x+11}-\sqrt{x+7}}{x^2-3x+2}$

3. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+1}{x^2-2}$

b)

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^2.(7x+2)^2}{(2x+1)^4}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x^2+1)(5x+3)}{(2x^3-1)(x+1)}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}-x\right)$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin(2x)+2\cos(x)}{x^2+x+1}$.

4. Tìm giới hạn bên phải, bên trái của hàm số f(x) tại x=x$_0$ và xét xem $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]$ **có tồn tại không trong các trường hợp sau:**

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-1}{x} & (\text{x}>1)\\ 5x+3 & (\text{x}\le 1)\end{cases}$ tại $x_0 = 1$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} & (\text{x}>1)\\ x^2+x+1 & (\text{x}\le 1)\end{cases}$ tại $x_0 = 1$

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4-x^2}{x-2} & (\text{x}<2)\\ 1-2x & (\text{x}\ge 2)\end{cases}$ tại $x_0 = 2$

d) $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{x^3-3x+2}}{x^2-5x+4}$ tại $x_0 = 1$

5. Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)\right]$

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2-x+3}+x\right)$

TRẮC NGHIỆM GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

Câu 1. Chọn phát biểu đúng trong các phát biểu sau:

A. Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=a$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(-x\right)=-a$

B. Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=a$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\left(-f\left(x\right)\right)=-a$

C. Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=a$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f\left(x\right)}=\dfrac{1}{a}$

D. Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=a$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f\left(x\right)}=\sqrt{a}$

Câu 2. Cho x_0 thuộc khoảng K, hàm số y = f(x) xác định trên K hoặc K\{x_0}. Hàm số f(x) được gọi là có giới hạn L khi $x\to x_0$ nếu

A. Tồn tại dãy số (x_n) sao cho $x_n\to x_0$ thỏa $f\left(x_n\right)\to L$.

B. Mọi tại dãy số (x_n) ta đều có $f\left(x_n\right)\to L$.

C. mọi dãy số (x_n) sao cho $x_n\in K\setminus\left\{x_0\right\},\forall n\in N^*$ và $x_n\to x_0$ ta đều có $f\left(x_n\right)\to L$.

D. tồn tại dãy số (x_n) sao cho $x_n\in K\setminus\left\{x_0\right\},\forall n\in N^*$ và $x_n\to x_0$ ta đều có $f\left(x_n\right)\to L$.

Câu 3. Cho $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=a,\ \lim\limits_{x\to x_0} g\left(x\right)=b$. Chọn kết luận sai trong các kết luận sau:

A. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]=a+b$

B. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f\left(x\right).g\left(x\right)\right]=ab$

C. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\dfrac{a}{b}$

D. $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{f\left(x\right)}=\sqrt[3]{a}$

Câu 4. Chọn kết luận sai trong các kết luận sau:

A. Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ thì $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a$. B. Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ thì $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = a$

C. Nếu $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$. <u>D</u>. Nếu $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = a$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 \; khi \; x < 1 \\ x + \sqrt{x-1} \; khi \; x \ge 1 \end{cases}$. Ta có

<u>A</u>. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1, \; \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 5$

B. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1, \; \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 5$

C. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1, \; \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1$

D. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -1, \; \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -5$

Câu 6. Cho $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -2$. Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau

A. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x).g(x) \right) = -\infty$

B. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) + g(x) \right) = +\infty$

<u>C.</u> $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

D. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

Câu 7. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x+5}{x+3}$ bằng A. 2 <u>B.</u> 1 C. -1 D. -2

Câu 8. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{2x^2 - x - 15}$ bằng A. $\dfrac{1}{2}$ B. 0 <u>C.</u> $\dfrac{6}{11}$ D. $\dfrac{12}{11}$

Câu 9. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$ bằng <u>A.</u> -3 B. $+\infty$ C. 1 D. $-\infty$

Câu 10. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{3x^3 + 2x - 5}$ bằng <u>A.</u> $\dfrac{3}{11}$ B. $\dfrac{9}{11}$ C. $\dfrac{3}{8}$ D. $\dfrac{1}{4}$

Câu 11. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x + \sqrt{2-x}}{x+2}$ bằng A. $\dfrac{-3}{4}$ <u>B.</u> $\dfrac{3}{4}$ C. $-\infty$ D. 0

Câu 12. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 2x - 8}{\sqrt{2x+5} - 1}$ bằng <u>A.</u> -6 B. -3 D. 1 D. 6

Câu 13. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{3x+1} - 1}{\sqrt{2x+4} - 2}$ bằng <u>A.</u> 3 B. $\dfrac{3}{2}$ C. $\dfrac{1}{2}$ D. 1

Câu 14. $\lim_{x\to 2}\frac{x-3+\sqrt{2x-3}}{x-2}$ bằng A. 1 B. 2 C. $-\infty$ D. kết quả khác

Câu 15. $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{x+5}-x+1}{x-3}$ bằng A. 0 B. $-\frac{11}{12}$ C. -1 D. Kết quả khác

Câu 16. $\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{\sqrt[3]{x^2+1}-1}$ bằng A. 6 B. $+\infty$ C. 0 D. $-\infty$

Câu 17. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}+2\sqrt{2x+5}-7}{x-2}$ bằng A. $+\infty$ B. $\frac{5}{6}$ C. 0 D. $\frac{7}{6}$

Câu 18. $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+3x+2}{2x^2+4x-3}$ bằngA. $\frac{1}{2}$ B. $+\infty$ C. $\frac{3}{4}$ D. $-\frac{2}{3}$

Câu 19. $\lim_{x\to +\infty}\frac{2x-\sqrt{x^2+8x}}{x+3}$ bằng A. 2 B. 3 C. 1 D. -1

Câu 20. $\lim_{x\to -\infty}\frac{3x+\sqrt{x^2+4x}}{2x+3}$ bằng A. 2 B. 1 C. -2 D. -1

Câu 21. $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+3}-x+2\right)$ bằng A. 4 B. 0 C. $+\infty$ D. 2

Câu 22. $\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{2x+\sqrt{4x^2+2x+1}}$ bằng A. 2 B. 0 C. -2 D. $-\infty$

Câu 23. $\lim_{x\to +\infty}\left(x+\sqrt[3]{x^2-x^3}\right)$ bằng A. $-\infty$ B. $+\infty$ C. 0 D. $\frac{1}{3}$

Câu 24. $\lim_{x\to -\infty}\frac{2x-\sqrt{x^2+8x}}{x+3}$ bằng A. 1 B. $-\infty$ C. $+\infty$ D. 3

Câu 25. $\lim_{x\to +\infty}\frac{3x+\sqrt{x^2+4x}}{2x+3}$ bằng A. 2 B. 1 C. $+\infty$ D. $-\infty$

Câu 26. $\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+3}-x+2\right)$ bằng A. 2 B. 4 C. $-\infty$ D. $+\infty$

Câu 27. $\lim_{x\to -\infty}\left(x+\sqrt[3]{x^2-x^3}\right)$ bằng A. $-\infty$ B. $\frac{1}{3}$ C. 0 D. $+\infty$

Câu 28. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+x-\sqrt{x^4+3x^2+2}\right)$ bằng A. $+\infty$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $-\infty$ D. $\frac{3}{2}$

Câu 29. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}+\sqrt{x^2+12x}\right)$ bằng A. -5 B. 7 C. -7 D. 5

Câu 30. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x-3 & khi\ \ x<-1\\ x^2+mx-m+3 & khi\ \ x\ge-1\end{cases}$.Tìm m để h/số có giới hạn tại x = -1

A. m = 2 B. $m=\frac{9}{2}$ C. $m=-\frac{1}{2}$ D. Không có m

Câu 31. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+1}{x-1} & khi\ x>1\\ \sqrt{2-x}+x & khi\ x\le1\end{cases}$. Tính $\lim\limits_{x\to1^-}f(x),\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$ ta được kết quả lần lượt là

A. $-\infty,\ 2$ B. $2,\ -\infty$ C. $+\infty,\ 2$ D. $2,+\infty$

Câu 32. Đặt $L=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt[3]{x+7}}{x-1}$. Tìm L bằng cách đặt $t=\sqrt[3]{x+7}$, ta được

A. $L=\lim\limits_{t\to2}\dfrac{\sqrt{3t^3-20}-t}{t^3-8}$ B. $L=\lim\limits_{t\to1}\dfrac{\sqrt{3t^3-20}-t}{t^3-8}$

C. $L=\lim\limits_{t\to2}\dfrac{\sqrt{3t^2-20}-t}{t^2-4}$ D. $L=\lim\limits_{t\to2}\dfrac{\sqrt{3t^3-20}+t}{t^3-8}$

Câu 33. Tính $L=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{2x+5}}{x+2}$ bằng cách đặt $t=\sqrt[3]{x+1}$, ta được

A. $L=\lim\limits_{t\to1}\dfrac{t-\sqrt{2t^3-1}}{t^3-1}$ B. $L=\lim\limits_{t\to-1}\dfrac{t+\sqrt{2t^3+3}}{t^3+1}$

C. $L=\lim\limits_{t\to2}\dfrac{t+\sqrt{2t^3-1}}{t^3-1}$ D. $L=\lim\limits_{t\to-1}\dfrac{t-\sqrt{2t^3-1}}{t^3-1}$

Câu 34. Tính $L=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt{4x+1}-5}{x-2}$ bằng cách đặt $t=\sqrt{4x+1}$ ta được

A. $\lim\limits_{t\to3}\dfrac{\sqrt[3]{3t^2+5}+4t-20}{t^2-9}$ B. $\lim\limits_{t\to3}\dfrac{\sqrt[3]{48t^2+80}+4t-20}{t^2-9}$

C. $\lim\limits_{t\to3}\dfrac{\sqrt[3]{3t^2+37}+2t-10}{t^2-9}$ D. $\lim\limits_{t\to2}\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{3\left(t^2-1\right)}{4}}+2+t-5}{\dfrac{t^2-1}{4}-2}$

Câu 35. $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+4x}$ bằng A. $\dfrac{5}{4}$ B. $-\dfrac{5}{4}$ C. 1 D. -1

Câu 36. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{x^2+5x+4}\right)$ bằng

A. 4 B. -4 C. 1 D.-1

Câu 37. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{2017}-1}{x^{2018}-1}$ bằng A. 0 B. 1 C. 2017 D. $\dfrac{2017}{2018}$

Câu 38. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{2018}+x^{2017}+....+x-2018}{x^{2018}-1}$ bằng

A. 2018 B. $\dfrac{2019}{2018}$ C. $\dfrac{2019}{2}$ D. Kết quả khác

Định lí: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Áp dụng định lí này giải các câu sau:

Câu 39. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}=$ A. $\dfrac{3}{5}$ B. 1 C. $+\infty$ D. $\dfrac{5}{3}$

Câu 40. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}=$ A. 1 B. $+\infty$ C. 2 D. 0

Câu 41. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{x-\dfrac{\pi}{4}}=$ A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $-\sqrt{2}$ D. 0

Câu 42. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x+\sin^2 x}{x^2}=$ A. 5 B. 2 C. 4 D. $+\infty$

Câu 43. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(1-\cos x\right)^2}{x^2}=$ A. 16 B. 4 C. 0 D. $+\infty$

Câu 44. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^2}=$ A. 5 B. 4 C. 2 D. 1

Câu 45. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 5x}{x}=$ A. 5 B. 0 C. 1 D. $+\infty$

QUAN HỆ VUÔNG GÓC

A – ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI ĐƯỜNG THẲNG

***I.*Góc giữa hai đường thẳng.**

- **Cách xác định góc giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b:**

1. Tính bằng ĐN góc (a, b) = góc (a',b') với a//a', b//b', a' và b' cắt nhau tại I

2. Xác định góc φ là góc giữa hai vtcp của a và b

Khi đó góc (a, b) = φ nếu $\varphi \le 90^0$

góc (a, b) = $180^0 - 90^0$ nếu $\varphi > 90^0$

- **Chú ý.** + $AB \perp CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0.$

  + Nếu a và b song song hoặc trùng nhau thì $\varphi = 0^0$.

<u>Bài 1</u>. Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC = AB = AC = a, BC = $a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng SC và AB.

<u>Bài 2</u>. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi, SA = AB và SA$\perp$BC. Tính góc giữa hai đường thẳng SD và BC.

<u>Bài 3</u>. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có các cạnh bằng a (hình hộp thoi), $\angle BAD = 60^0$, $\angle BAA' = \angle DAA' = 120^0$.

a) Tính góc giữa các cặp đường thẳng AB với A'D và AC' với B'D.

b) Tính diện tích các hình A'B'CD và ACC'A'.

c) Tính góc giữa đường thẳng AC' và các đường thẳng AB, AD, AA'.

<u>Bài 4</u>. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J, H, K là trung điểm của BC, AC, AD, BD. Hãy tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD trong các trường hợp:

a) Tứ giác IJHK là hình thoi có đường chéo IH = $\sqrt{3}$IJ.

b) Tứ giác IJHK là hình chữ nhật.

<u>Bài 5</u>. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N là trung điểm của BC và AD.

a) Tính góc giữa AB và DM, biết ABCD là tứ diện đều cạnh bằng a.

b) Tính góc giữa AB và CD, biết AB = CD = 2a và MN = $a\sqrt{3}$.

c) Tính góc giữa AB và CD, biết AB = CD = 2a và MN = $a\sqrt{2}$.

d) Tính góc giữa AB và CD, biết AB = 2a, CD = $2a\sqrt{2}$ và MN = $a\sqrt{5}$.

<u>Bài 6</u>. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = a, BC = b và AA' = c.

a) Tính góc giữa hai đường thẳng AD' và B'C.

b) Tính góc giữa hai đường thẳng AB và A'C.

<u>Bài 7</u>. Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC = a và các tam giác SAB, SBC, SCA vuông tại S. Gọi M là trung điểm BC. Tính góc giữa AC và SM.

<u>Bài 8</u>. Cho hình chóp S.ABCD có tất cả các cạnh đều bằng a, đáy là hình vuông. Gọi N là trung điểm SB. Tính góc giữa AN và CN, AN và SD.

<u>Bài 9</u>. Cho tứ diện ABCD có AB = AC = AD và $\angle BAC = \angle BAD = 60^0$, $\angle CAD = 90^0$. Chứng minh:

a) AB$\perp$CD.

b) Nếu I, J là trung điểm của AB và CD thì IJ$\perp$AB, IJ$\perp$CD.

Bài 10. Cho tứ diện ABCD có các tam giác ABC và DBC là các tam giác đều cạnh a. Cho AD=$a\sqrt{2}$.

a) Chứng minh AD$\perp$BC.

b) Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

II. Chứng minh đường thẳng vuông góc với đường thẳng

Phương pháp: 1. Góc giữa chúng bằng 90^0

2. $\left.\begin{matrix} a\perp b \\ b//c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a\perp c$ 3. $\left.\begin{matrix} a\perp(\alpha) \\ b\subset(\alpha) \end{matrix}\right\} \Rightarrow a\perp b$ 4. $\left.\begin{matrix} a\perp(\alpha) \\ b//(\alpha) \end{matrix}\right\} \Rightarrow a\perp b$

5. Định lí 3 đường vuông góc

6. Nếu 2 đường thẳng nằm trong cùng mp thì có thể dùng các kết quả của hh phẳng.

BÀI TẬP

1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AA', BD. Chứng minh: MN là đường vuông góc chung của AA', BD.
2. Cho tứ diện ABCD đều cạnh a. O là tâm đtr ngoại tiếp tam giác BCD.
   a. Cm AO vuông góc với CD.
   b. M là trung điểm CD tính góc giữa AC và BM.
3. Cho tứ diện ABCD đều, M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Các điểm I, J, K lần lượt thuộc các đt BC, AC, AD thỏa mãn $\overrightarrow{IB}=k\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{JA}=k\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{KA}=k\overrightarrow{KD}$
   a. Cm MN vuông góc với IJ, JK
   b. AB vuông góc vớiCD
4. Cho tứ diện ABCD có $AB=BC, AD=DC$. Chứng minh: $AC\perp BD$.
5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.
   a. Cm AC vuông góc với B'D'
   b. Cm AB' vuông góc với CD'
   c. Cm AD' vuông góc với CB'
6. Cho hình tứ diện ABCD có các cặp cạnh đối bằng nhau: $AB=CD=a; BC=AD=b; AC=BD=c$.
   a) Chứng minh rằng: đoạn nối hai trung điểm của cặp cạnh đối diện là đường vuông góc chung của hai cạnh đó.
   b) Tính độ dài đường vuông góc chung đó theo a, b, c.
7. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh $4\sqrt{2}, SC\perp(ABC)$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CB, $SC=2$. Tính khoảng cách ngắn nhất giữa SF và CE.
8. Cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng:
   a) $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$
   b) Nếu $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$ thì $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$. (Đại Học Xây Dựng – 2000)

9. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi và $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh: $BD \perp SC$.
10. Cho tứ diện ABCD có $AB \perp (BCD)$ và $BCD = 90^0$. Gọi BH là đường cao tam giác ABC. Chứng minh tam giác BHD vuông.
11. Cho hình chóp S.ABCD có $SA \perp (ABCD)$ và ABCD là hình chữ nhật. chứng minh: bốn mặt bên SAB, SBC, SCD, SAD đều là những tam giác vuông.
12. Tứ diện ABCD có $AB \perp CD$ và $AC \perp BD$. Gọi H là hình chiếu của A xuống (BCD). Chứng minh rằng: H là trực tâm tam giác BCD và $AD \perp BC$.
13. Trong hình chóp S.ABCD đáy là hình chữ nhật ABCD. Gọi SH là đường cao hình chóp và SK, SL thứ tự là đường cao các tam giác SAB và SCD. Chứng minh rằng: H, K, L thẳng hàng.
14. Cho hai tam giác cân ABC, BCD chung đáy BC nằm ở hai mặt phẳng khác nhau.
    a. Cm AD vuông góc với CB.
    b. M thuộc AB: $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}, N \in BD : \overrightarrow{ND} = k\overrightarrow{NB}$ cm MN vuông góc với BC
15. Cho tứ diện ABCD có CD = 4/5 AB; I,J,K lần lượt là trung điểm của BC, AC, BD; JK=5/6AB. Tính góc giữa CD và IJ, CD và AB.
16. Cho LT tam giác ABC.A'B'C' đáy là tam giác đều cạnh a. CC'vuông góc với đáy, CC'=a
    a. Gọi I là trung điểm BC. c/m AI vuông góc với BC'
    b. Gọi M là trung điểm BB' c/m BC'vuông góc với AM
    c. K thuộc đoạn A'B': B'K=1/4a, J là trung điểm B'C' c/m AM vuông góc với MK, KJ
17. Cho 2 hcn ABCD, ABEF nằm trên hai mặt phẳng khác nhau. ACvuông góc với BF; CH, FK lần lượt là 2 đường cao của tam giác BCE và ADF. Chứng minh
    a. Tam giác ACH, BKF là các tam giác vuông.
    b. BF vuông góc với AH, AC vuông góc với BK.